KUT I MJERA KUTA

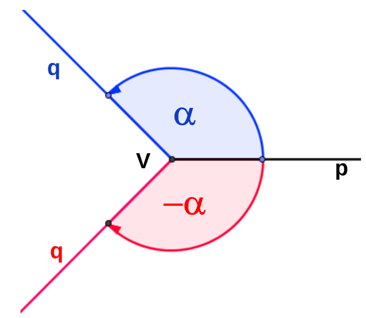
Mjera kuta $\measuredangle\, pVq$:
- negativna (ako iz p u q dolazimo vrtnjom u smjeru kazaljke na satu)
- pozitivna (ako iz p u q dolazimo vrtnjom suprotno smjeru kazaljke na satu)

Funkcija najveći cjelobrojni dio
$f(x) = \lfloor x \rfloor = \text{"najveći cijeli broj manji ili jednak broju } x\text{"}$

Glavna mjera kuta α':

u stupnjevima $(0 \le \alpha' < 360°)$: $\boldsymbol{\alpha' = \alpha° - \left\lfloor \frac{\alpha°}{360°} \right\rfloor \cdot 360°}$

u radijanima $(0 \le \alpha' < 2\pi)$: $\boldsymbol{\alpha' = \alpha(rad) - \left\lfloor \frac{\alpha(rad)}{2\pi} \right\rfloor \cdot 2\pi}$



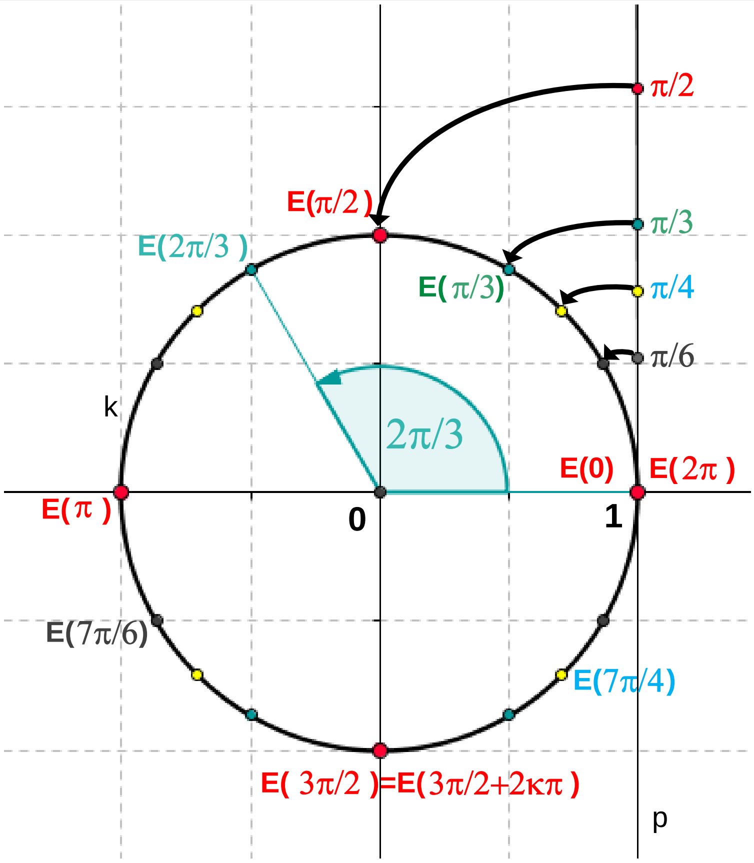
Duljina luka: $\boldsymbol{l = \alpha(rad) \cdot r}$

Površina kružnog isječka: $\boldsymbol{P = \frac{1}{2} r l = \frac{1}{2} \alpha(rad) \cdot r^2}$

Pretvorba stupnjeva u radijane: $\boldsymbol{\alpha(rad) = \frac{\alpha°}{180°} \cdot \pi}$

Pretvorba radijana u stupnjeve: $\boldsymbol{\alpha° = \frac{\alpha(rad)}{\pi} \cdot 180°}$

BROJEVNA KRUŽNICA



Namatanjem brojevnog pravca p na kružnicu definirano je pridruživanje realnih brojeva točkama brojevne kružnice. Ovo preslikavanje zovemo eksponencijalno preslikavanje :

$$\boldsymbol{(t \in p) \longmapsto E(t) \in k}(0,1)$$

p - pravac paralelan s y osi, a prolazi točkom (1,0)
k(0,1) - brojevna kružnica
Na slici je prikazano pridruživanje pozitivnih brojeva, a negativne brojeve pridružujemo u suprotnom smjeru od pozitivnih, odnosno u smjeru kretanja kazaljke.
Primjeri nekih točaka:

$$E(0) = E(2\pi) = (1{,}0)$$
$$E\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0{,}1)$$
$$E(\pi) = (-1{,}0)$$

U svaku točku kružnice preslika se beskonačno mnogo točaka brojevnog pravca jer vrijedi:

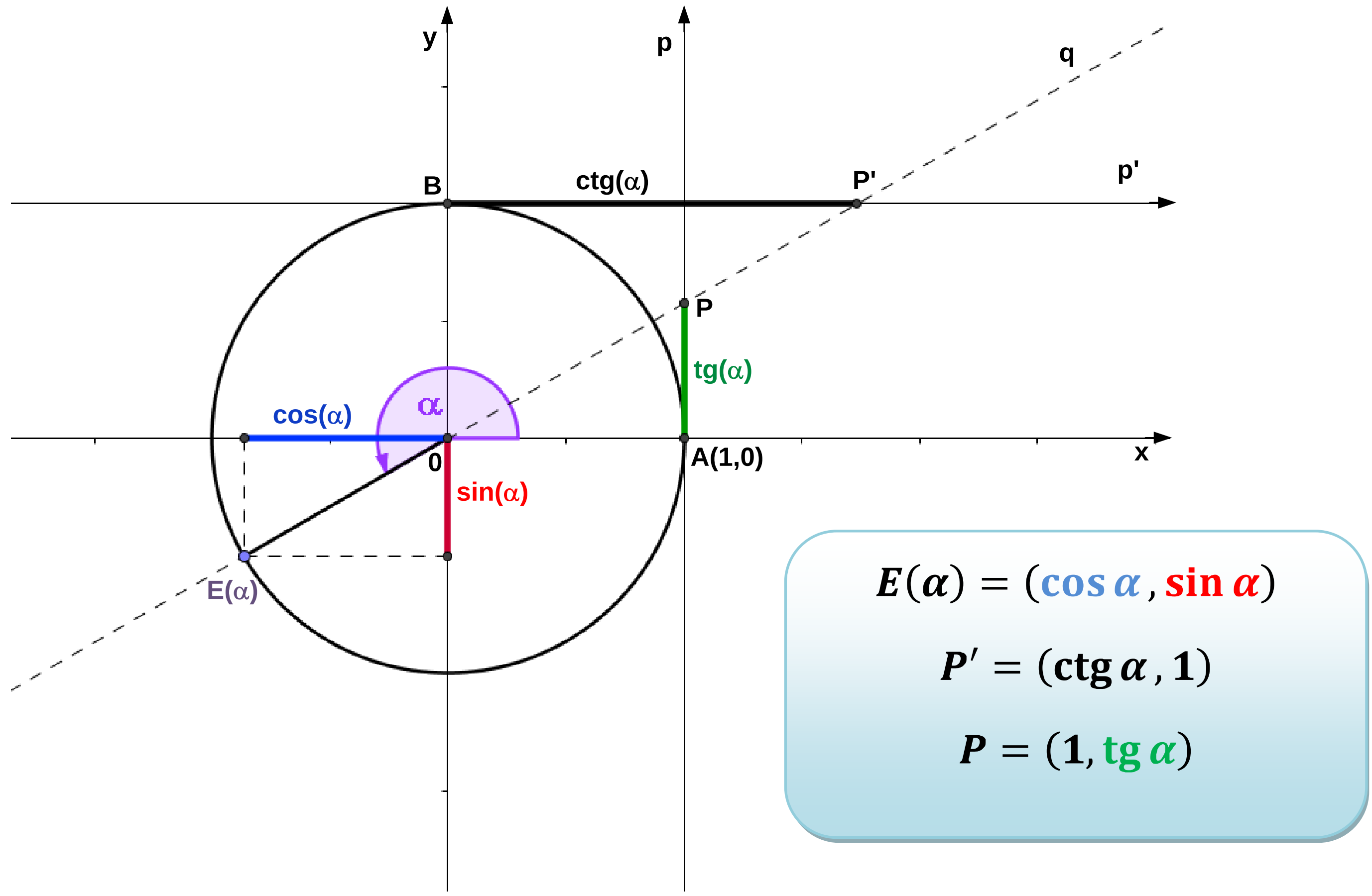
$$E(\alpha) = E(\alpha + 2k\pi)$$
$$\boldsymbol{E(\alpha') = E(\alpha)}$$

α' - glavna mjera kuta

VRIJEDNOSTI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

$\alpha'/°$	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
α'/rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$sin(\alpha)$	**0**	$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$cos(\alpha)$	**1**	$\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$	**0**	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$tg(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$ctg(\alpha)$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$
$\alpha/°$	-360	-330	-315	-300	-270	-240	-225	-210	-180	-150	-135	-120	-90	-60	-45	-30	0

DEFINICIJA TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA



$$E(\alpha) = (\cos\alpha\,, \sin\alpha)$$

$$P' = (\operatorname{ctg}\alpha\,, 1)$$

$$P = (1, \operatorname{tg}\alpha)$$

$E(\alpha) \in k(0{,}1)$ - točka na brojevnoj kružnici čije su koordinate cos i sin kuta α	α/kvadrant	I	II	III	IV
p' - pravac paralelan x-osi, a prolazi točkom B(0,1)	$sin(\alpha)$	+	+	-	-
p - pravac paralelan y-osi, a prolazi točkom A(1,0)	$cos(\alpha)$	+	-	-	+
q - pravac koji prolazi točkama O(0,0) i $E(\alpha)$	$tg(\alpha)$	+	-	+	-
$P' = q \cap p'$; $P = q \cap p$	$ctg(\alpha)$	+	-	+	-

ODREĐIVANJE VRIJEDNOSTI KUTA

$\sin(\alpha) = y \in [-1{,}1]$	$\cos(\alpha) = x \in [-1{,}1]$	$\operatorname{tg}(\alpha) = t \in \mathbb{R}$	$\operatorname{ctg}(\alpha) = t' \in \mathbb{R}$
$-\frac{\pi}{2} \le \{\alpha = arc\sin(y)\} \le \frac{\pi}{2}$	$0 \le \{\alpha = arc\cos(x)\} \le \pi$	$-\frac{\pi}{2} < \{\alpha = arc\operatorname{tg}(t)\} < \frac{\pi}{2}$	$0 < \{\alpha = arc\operatorname{ctg}(t')\} < \pi$
Imamo beskonačno mnogo kuteva za koje trigonometrijska funkcija poprima istu vrijednost, a samo jedan kut nam vraća neka arkus funkcija.			$\alpha = arc\operatorname{ctg}(t') = arc\operatorname{tg}\left(\frac{1}{t'}\right)$

OSNOVNI TRIGONOMETRIJSKI IDENTITETI

OSNOVNI TRIGONOMETRIJSKI IDENTITETI			NAPOMENA
$\boldsymbol{sin^2t + cos^2t = 1}$	$\boldsymbol{tgt = \frac{sint}{cost}}$	$\boldsymbol{ctgt = \frac{1}{tgt} = \frac{cost}{sint}}$	$\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$

PARNOST FUNKCIJA

Parna funkcija: $f(-x) = f(x)$	Parna funkcija ima graf simetričan s obzirom na y os.
Neparna funkcija: $f(-x) = -f(x)$	Parna funkcija ima graf simetričan s obzirom na ishodište koordinatnog sustava.

PERIODIČNOST FUNKCIJA

Funkcija je periodična ako postoji broj $P \neq 0$ takav da za svaki $t \in \mathfrak{D}(f)$ vrijedi $\boldsymbol{f(t) = f(t+P)}$.

P – period funkcije ; P_0 – temeljni period (najmanji pozitivni P)

SVOJSTVA TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

Parnost:

$$\left.\boldsymbol{\cos(-x) = \cos(x)}\ \right\} \Rightarrow parna$$

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\sin(-x)} &\boldsymbol{= -\sin(x)}\\ \boldsymbol{\operatorname{tg}(-x)} &\boldsymbol{= -\operatorname{tg}(x)}\\ \boldsymbol{\operatorname{ctg}(-x)} &\boldsymbol{= -ctg(x)}\end{aligned}\right\} \Rightarrow neparne\ funkcije$$

Periodičnost ($k \in \mathbb{Z}$):

$\sin(t) = \sin(t + 2k\pi) \Rightarrow \boldsymbol{P_0 = 2\pi}$

$\cos(t) = \cos(t + 2k\pi) \Rightarrow \boldsymbol{P_0 = 2\pi}$

$\operatorname{tg}(t) = \operatorname{tg}(t + k\pi) \Rightarrow \boldsymbol{P_0 = \pi}$

$\operatorname{ctg}(t) = \operatorname{ctg}(t + k\pi) \Rightarrow \boldsymbol{P_0 = \pi}$

Ograničenost:

$|\sin\alpha| \le 1$

$|\cos\alpha| \le 1$

za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$

Područje definicije ($k \in \mathbb{Z}$):

tg t definiran je za svaki $\mathbb{R} \ni t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ jer $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \pm\infty$

ctg t definiran je za svaki $\mathbb{R} \ni t \neq k\pi$ jer $\operatorname{ctg}(k\pi) = \pm\infty$

sin t i cos t definirane su za svaki $t \in \mathbb{R}$

ADICIJSKI TEOREMI

Kosinus zbroja i razlike

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

Sinus zbroja i razlike

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$

Tangens zbroja i razlike

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} \qquad \operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

Formule redukcije za sinus i kosinus funkciju

$\cos(\pi - t) = -\cos t$	$\cos(\pi + t) = -\cos t$
$\sin(\pi - t) = \sin t$	$\sin(\pi + t) = -\sin t$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos t$

TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE DVOSTRUKOG KUTA

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$	$\operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$

TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE POLOVIČNOG KUTA

predznak se uzima prema kvadrantu u kojem je $\alpha/2$:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

UNIVERZALNA ZAMJENA

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

FORMULE PRETVORBE

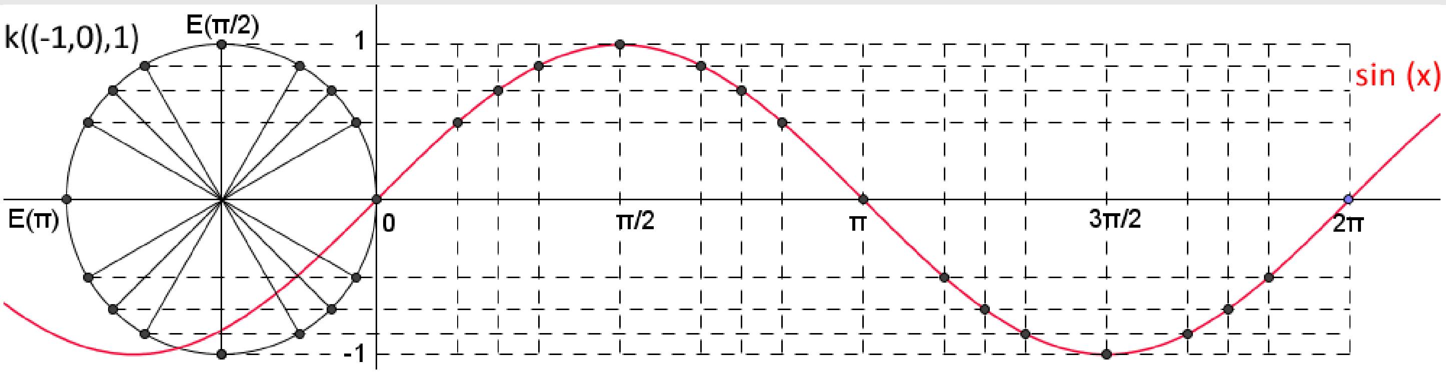
Transformacija umnoška u zbroj

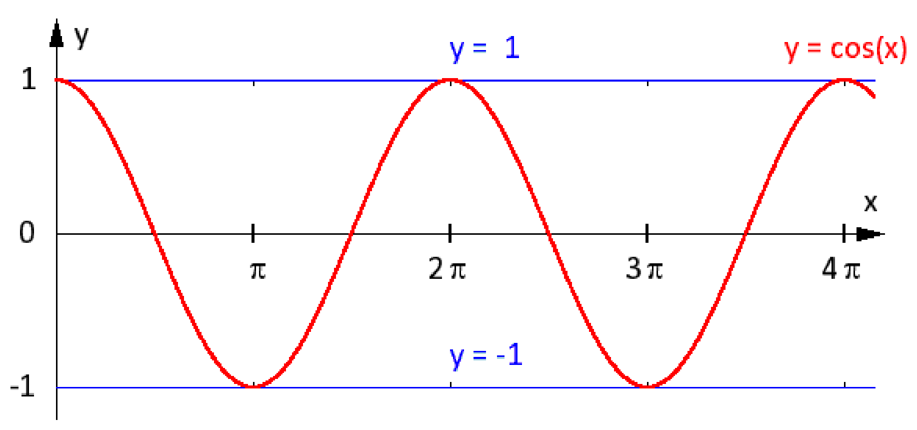
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$
$$\cos x \sin y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) - \sin(x-y)]$$
$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

Transformacija zbroja u umnožak

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

GRAFOVI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA





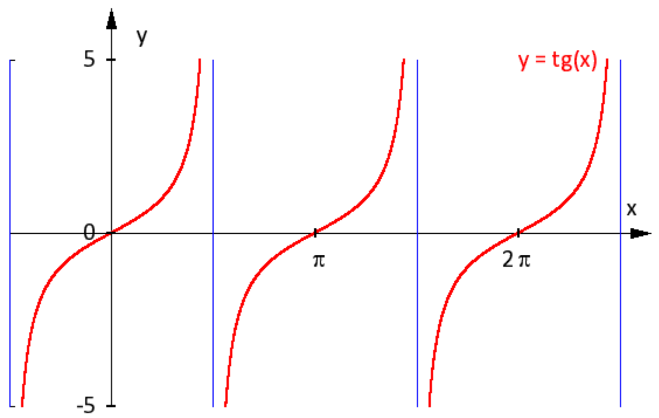
$$\boldsymbol{f(x) = A\cos(\omega x + \varphi)}$$

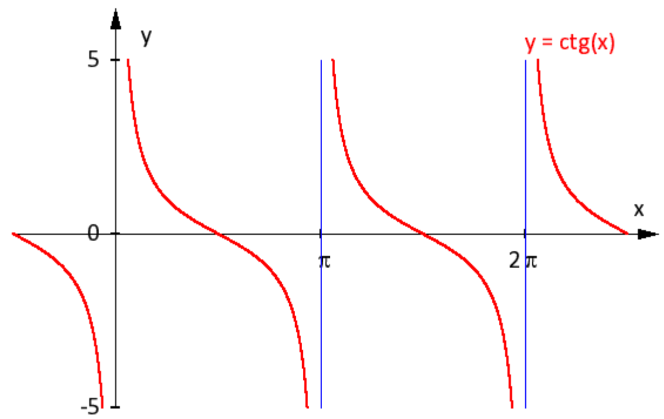
$(A \neq 0), (\omega > 0), (\varphi \in \mathbb{R})$

Nazivi: ω kružna frekvencija;
$T_0 = 2\pi/\omega$ temeljni period;
φ fazni pomak;
$|A|$ amplituda.

Graf funkcije sinus nazivamo sinusoida; kosinus kosinusoida; tangens tangensoida; kotangens kotangensoida.

GRAFOVI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA





$$\boldsymbol{f(x) = Asin[B(x+C)] + D};\ (A \neq 0), (B > 0), C, D \in \mathbb{R}$$

Graf funkcije f(x) dobijemo translacijom grafa funkcije $Asin(Bx)$ za **-C** po x-osi te za **D** po y-osi:

1. Nacrtamo **pomoćni koordinatni sustav $\boldsymbol{O'x'y'}$** u kojem ćemo nacrtati graf funkcije $p(x') = Asin(Bx')$.
2. Nacrtamo **pomoćne pravce $\boldsymbol{y' = -A}$** i **$\boldsymbol{y' = A}$** $\{p(x')$ ograničena je tim pravcima jer $p(x') \in [-A, A]\}$.
3. Označimo **nultočke** funkcije $Asin(Bx')$ što su $\boldsymbol{x'_n} = \frac{\boldsymbol{n \cdot \pi}}{\boldsymbol{B}}$, $n \in \mathbb{Z}$ (točke u kojima $p(x')$ siječe x'-os, $Asin(Bx') = 0$).
4. Označimo **ekstreme** [točke grafa čije su koordinate (polovište segmenta između nultočaka, A ili -A)]. Minimumi i maksimumi periodično se izmjenjuju, a prvi ekstrem je: a) maksimum ako A>0; b) minimum ako A<0.
5. Nacrtamo **sinusoidu** između nacrtanih pravaca kroz ucrtane točke.
6. Ucrtamo **koordinatni sustav Oxy** čije su osi: a) x paralelna sa osi x' pomaknuta za –D po y'
   b) y paralelna sa osi y' pomaknuta za +C po x'
7. Graf promatrane funkcije periodično se ponavlja u intervalima $T_0 = \frac{2\pi}{B}$.

$$\boldsymbol{f(x) = Acos[B(x+C)] + D};\ (A \neq 0), (B > 0), C, D \in \mathbb{R}$$

Graf funkcije f(x) dobijemo analogno prethodnome za sinus sa sljedećom promjenom: 3. $\boldsymbol{x'_n} = \frac{\boldsymbol{(2n+1)\cdot\pi}}{\boldsymbol{2B}}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\boldsymbol{f(x) = A \cdot tg[B(x+C)] + D};\ (A \neq 0), (B > 0), C, D \in \mathbb{R}$$

Asimptota funkcije je pravac kojem se graf funkcije približava, a ne dodiruje ga kada točka grafa odmiče u beskonačnost.

Graf funkcije f(x) dobijemo translacijom grafa funkcije $A \cdot tg(Bx)$ za **-C** po x-osi te za **D** po y-osi:

1. Nacrtamo **pomoćni koordinatni sustav $\boldsymbol{O'x'y'}$** u kojem ćemo nacrtati graf funkcije $p(x') = A \cdot tg(Bx')$
2. Označimo **nultočke** funkcije p(x') što su $\boldsymbol{x'_n} = \frac{\boldsymbol{n \cdot \pi}}{\boldsymbol{B}}$, $n \in \mathbb{Z}$ [točke u kojima p(x') siječe x'-os, $p(x') = 0$]
3. Kroz polovišta između nultočaka ucrtamo vertikalne **asimptote** funkcije $p(x')$, odnosno pravce $\boldsymbol{x'_a} = \frac{\boldsymbol{(2a+1)\pi}}{\boldsymbol{2B}}$, $a \in \mathbb{Z}$.
4. Između nacrtanih asimptota nacrtamo tangensoidu: ako je A>0, iz $-\infty$ uz lijevu asimptotu kroz nultočku prema $+\infty$ uz desnu asimptotu; a ako je A<0, iz $+\infty$ uz lijevu asimptotu kroz nultočku prema $-\infty$ uz desnu asimptotu;
6. Ucrtamo **koordinatni sustav Oxy** čije su osi: a) x paralelna sa osi x' pomaknuta za –D u smjeru y'
   b) y paralelna sa osi y' pomaknuta za +C u smjeru x'
7. Graf funkcije periodično se ponavlja u intervalima $T_0 = \frac{\pi}{B}$.

$$\boldsymbol{f(x) = A \cdot ctg[B(x+C)] + D};\ (A \neq 0), (B > 0), C, D \in \mathbb{R}$$

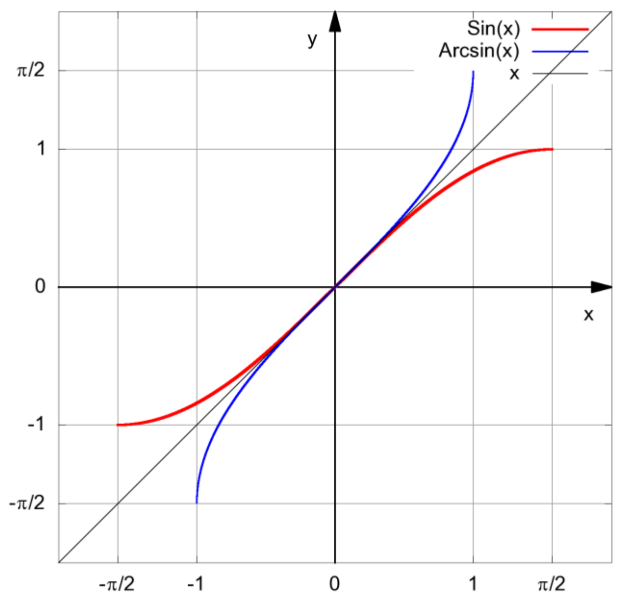
Graf funkcije f(x) dobijemo analogno prethodnome za tangens sa sljedećim promjenama:

2. Nultočke su: $\boldsymbol{x'_n} = \frac{\boldsymbol{(2n+1)\pi}}{\boldsymbol{2B}}$, $n \in \mathbb{Z}$ 3. Asimptote su: $\boldsymbol{x'_a} = \frac{\boldsymbol{a\pi}}{\boldsymbol{B}}$, $a \in \mathbb{Z}$

3. Između nacrtanih asimptota nacrtamo kotangensoidu: ako je A>0, iz $+\infty$ uz lijevu asimptotu kroz nultočku prema $-\infty$ uz desnu asimptotu; a ako je A<0, iz $-\infty$ uz lijevu asimptotu kroz nultočku prema $+\infty$ uz desnu asimptotu

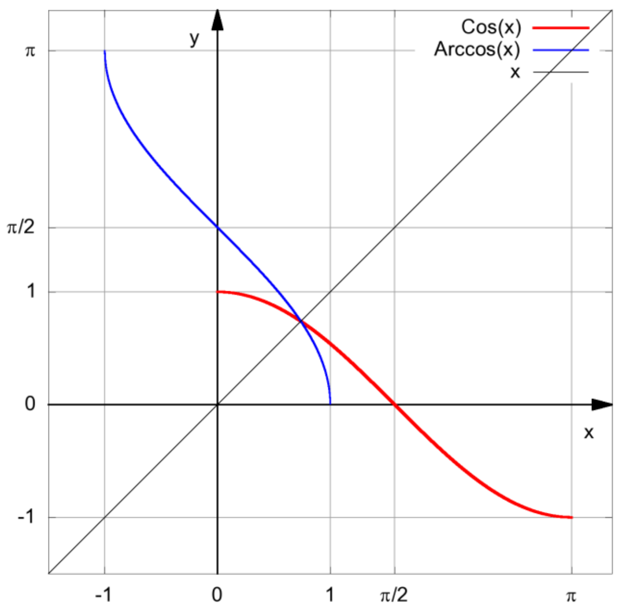
GRAFOVI CIKLOMETRIJSKIH FUNKCIJA (INVERZNE OD TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA)

Inverzne funkcije simetrične su s obzirom na pravac y=x.



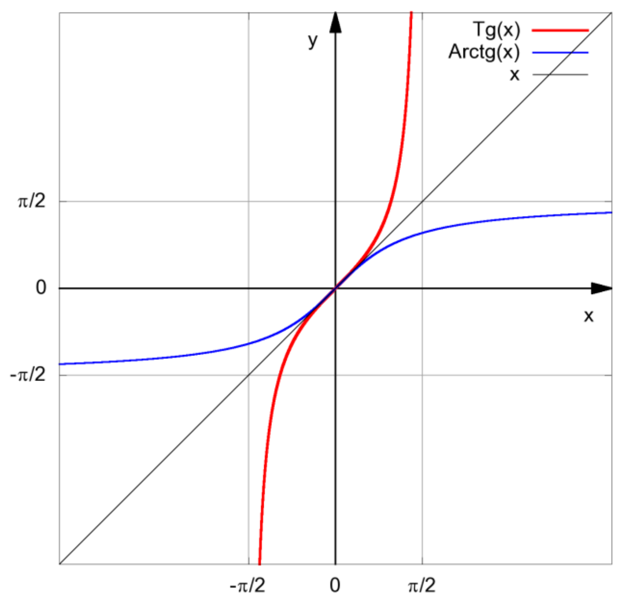
$$Sin = sin|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}: \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$$

$$Arcsin = Sin^{-1}: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$



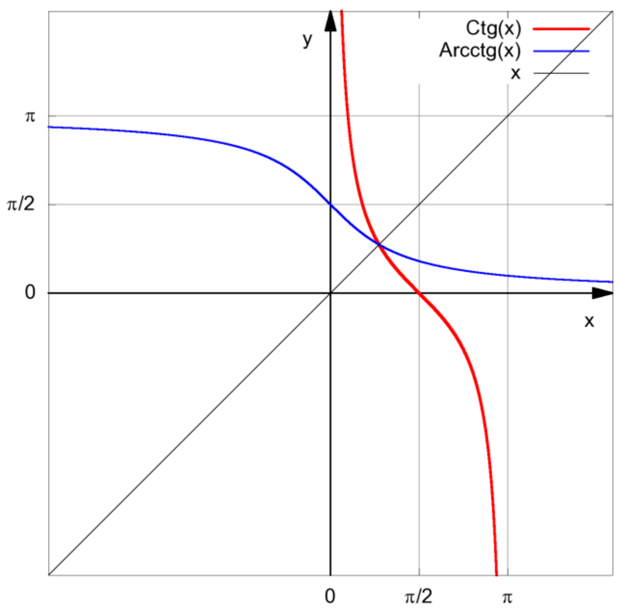
$$Cos = cos|_{[0,\pi]}: [0,\pi] \to [-1,1]$$

$$Arccos = Cos^{-1}: [-1,1] \to [0,\pi]$$



$$Tg = tg|_{\langle-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle}: \langle-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle \to \mathbb{R}$$

$$Arctg = Tg^{-1}: \mathbb{R} \to \langle-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle$$



$$Ctg = ctg|_{\langle 0,\pi\rangle}: \langle 0,\pi\rangle \to \mathbb{R}$$

$$Arcctg = Ctg^{-1}: \mathbb{R} \to \langle 0,\pi\rangle$$